
Prüfungsteilnehmer

Prüfungstermin

Einzelprüfungsnummer

Kennzahl: _____

Frühjahr

Kennwort: _____

2006

64013

Arbeitsplatz-Nr.: _____

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Physik (vertieft studiert)**

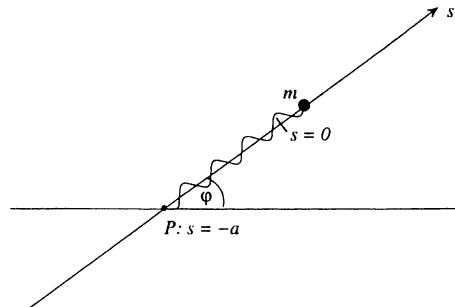
Einzelprüfung: **Theoretische Physik**

Anzahl der gestellten Aufgaben: 8 Aufgaben, von denen 4 gemäß untenstehender
Auswahlregel zu bearbeiten sind

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 9

Zu den vier Themenschwerpunkten A (Mechanik), B (Elektrodynamik), C (Thermodynamik) und D (Quantenmechanik) ist jeweils entweder die Aufgabe 1 oder 2 zu wählen. Auf der Vorderseite des Kopfbogens sind im Feld „Gewähltes Thema: Nr.“ die Nummern der vier gewählten Aufgaben anzugeben (z. B. A2, B1, C1, D2)!

Bitte wenden!

Themenschwerpunkt AMechanikAufgabe 1: Rotierende Stange

Ein Massenpunkt der Masse m gleite reibungsfrei auf einer masselosen, unendlich langen Stange und sei mit einer harmonischen Kraft $F = -ks$, $k > 0$ an einen Punkt $s = 0$ auf der Stange gebunden. Die harmonische Kraft werde durch eine Feder mit Ruhelänge a ausgeübt, die an einem festen Punkt P (bei $s = -a$) auf der Stange verankert ist. Die Stange kann ferner in einer Ebene um den festen Punkt P rotieren; der Winkel gegen eine feste Gerade in dieser Ebene sei φ . Die Schwerkraft spiele keine Rolle.

- Stellen Sie die Lagrangefunktion des Massenpunktes in den Koordinaten $s(t)$ und $\varphi(t)$ auf. (Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass für die Position des Massenpunktes immer $s(t) > -a$ gilt.) (4 Punkte)
- Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen? Interpretieren Sie die Terme proportional zu $\dot{\varphi}$ aus der Sicht eines mitrotierenden Beobachters. (8 Punkte)
- Eine der Koordinaten ist zyklisch. Wie lautet der entsprechende Erhaltungssatz? Was ist die Bedeutung der entsprechenden erhaltenen Größe? Gibt es eine weitere Erhaltungsgröße, und wie lautet diese? (4 Punkte)
- Eliminieren Sie (durch Nutzung des entsprechenden Erhaltungssatzes) die zyklische Koordinate, und bringen Sie die so erhaltene Gleichung für $s(t)$ in die Form $m\ddot{s} = -\frac{d}{ds}V_{\text{eff}}(s)$. Wie lautet das effektive Potential? (6 Punkte)
- Skizzieren Sie das effektive Potential, finden Sie den Punkt s_0 (unter der Annahme $|s_0| \ll a$) an dem es minimal wird, und diskutieren Sie qualitativ die mögliche Bewegung. (3 Punkte)

Aufgabe 2: Teilchen in konstantem Zentralkraftfeld

Ein Teilchen der Masse m mit Ortsvektor \vec{r} bewege sich in einem dreidimensionalen Kraftfeld, wobei die Kraft in Richtung auf den Ursprung zeigt und ihr Betrag K unabhängig vom Ort ist.

- a) Wie lautet die newtonsche Bewegungsgleichung für dieses Problem? Bestimmen Sie die zugehörige potentielle Energie, und geben Sie den Energieerhaltungssatz an. (5 Punkte)
- b) Zeigen Sie ausgehend von der newtonschen Bewegungsgleichung, dass auch der Drehimpuls erhalten ist. Wie kann man daraus schließen, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt? (5 Punkte)
- c) Beweisen Sie den Zusammenhang

$$\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^2} + \dot{r}^2.$$

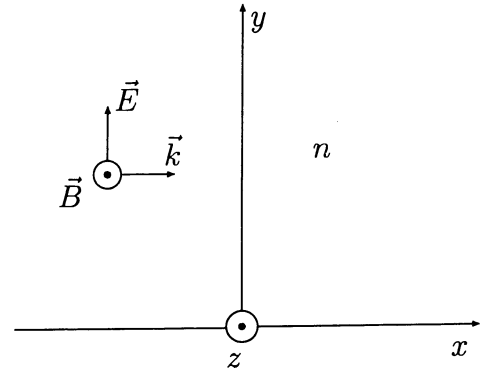
Hier ist r der Abstand vom Ursprung, und \vec{L} ist der Drehimpuls. (7 Punkte)

Hinweis: $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

- d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Resultate aus den Teilaufgaben a und c ein effektives Potential für die Radialbewegung, und skizzieren Sie dieses effektive Potential. Für $\vec{L} \neq 0$ ist die Kreisbahn eine mögliche Bahnform für das vorliegende Problem. Bestimmen Sie den Bahnradius und die Winkelgeschwindigkeit als Funktion des Drehimpulses. (8 Punkte)

Themenschwerpunkt BElektrodynamik/Optik**Aufgabe 1: Reflexion**

Die Ebene $x = 0$ sei die Grenzfläche zwischen dem Vakuum (Halbraum $x < 0$) und einem Dielektrikum (Halbraum $x > 0$) mit konstantem Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon} > 1$ und Permeabilität $\mu = \mu_0$. Ein in x -Richtung einfallender Lichtstrahl (monochromatische ebene Welle) mit Frequenz ω , Wellenzahl $\vec{k} = \vec{e}_x k$ und elektrischem Feld $\vec{E} = \vec{e}_y E$ treffe aus dem Vakuum senkrecht auf die Grenzfläche.



Die elektrischen und magnetischen Felder der einfallenden Welle (\vec{E} , \vec{B}), der transmittierten Welle (\vec{E}' , \vec{B}') und der reflektierten Welle (\vec{E}'' , \vec{B}'') können geschrieben werden als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_y E_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad \vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{e}_y E'_0 e^{i(nkx - \omega t)}, \quad \vec{E}''(\vec{r}, t) = \vec{e}_y E''_0 e^{i(-kx - \omega t)}; \quad (1a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{e}_z B_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad \vec{B}'(\vec{r}, t) = \vec{e}_z B'_0 e^{i(nkx - \omega t)}, \quad \vec{B}''(\vec{r}, t) = \vec{e}_z B''_0 e^{i(-kx - \omega t)}. \quad (1b)$$

- Benutzen Sie das Induktionsgesetz $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$, um den Zusammenhang zwischen E_0 und B_0 (E'_0 und B'_0 , E''_0 und B''_0) herzuleiten. (6 Punkte)
- Berechnen Sie die Amplituden der transmittierten Welle E'_0 und der reflektierten Welle E''_0 als Funktionen von n und E_0 .
Hinweis: Für die vorgegebene Geometrie sind die elektrischen und magnetischen Felder beide *stetig* an der Grenzfläche. (8 Punkte)
- Sind die elektrischen Felder der einfallenden und reflektierten Wellen parallel oder antiparallel zueinander? (2 Punkte)
- Die Intensitäten der einfallenden, transmittierten und reflektierten Wellen können wie folgt durch die entsprechenden Energiestromdichten ausgedrückt werden:

$$I = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}^*|, \quad I' = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{E}' \times \vec{B}'^*|, \quad I'' = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{E}'' \times \vec{B}''^*|. \quad (2)$$

Berechnen Sie $T = I'/I$ und $R = I''/I$, d.h. die transmittierte bzw. reflektierte Intensität bezogen auf die einfallende Intensität. (6 Punkte)

- Was muss für $R + T$ gelten und warum? Überprüfen Sie diese Beziehung mit dem Ergebnis von d). (3 Punkte)

Aufgabe 2: Elektromagnetische Wellen

Es sollen elektromagnetische Wellen in einem isotropen, homogenen Material mit den Maxwellgleichungen (in SI-Einheiten)

$$\begin{aligned}\epsilon\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{B} &= \frac{\partial \epsilon\epsilon_0 \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\end{aligned}$$

betrachtet werden. Hierbei ist \vec{j} die Stromdichte, die dem ohmschen Gesetz $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ mit der elektrischen Leitfähigkeit σ genüge, welche im Allgemeinen komplex und frequenzabhängig sei. Ferner seien keine freien Ladungen vorhanden.

- a) Zeigen Sie, dass die zeitabhängigen Maxwellgleichungen ebene Wellen der Form

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]\end{aligned}$$

als Lösungen besitzen.

(5 Punkte)

- b) Zeigen Sie, dass es sich um transversale Wellen handelt. Welchen Winkel schließen \vec{E}_0 und \vec{B}_0 ein?

(5 Punkte)

- c) Welche Dispersionsrelation $\omega = \omega(\vec{k})$ ergibt sich für Isolatoren ($\sigma \equiv 0$)? Was ergibt sich für Phasen- und Gruppengeschwindigkeit?

(6 Punkte)

- d) Welche Dispersionsrelation $k^2 = k^2(\omega)$ ergibt sich, wenn $\sigma(\omega)$ die Form

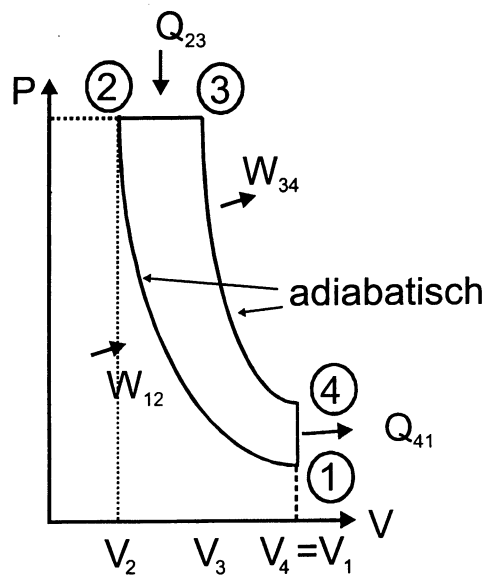
$$\sigma = \sigma_0 / (1 - i\omega\tau) \quad (3)$$

besitzt? Mit welcher Potenz von ω skaliert der komplexe Brechungsindex im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$?

(9 Punkte)

Themenschwerpunkt C**Thermodynamik****Aufgabe 1: Dieselmotor**

Untenstehende Zeichnung zeigt das idealisierte (P, V) -Diagramm für den reversiblen Kreisprozess eines Dieselmotors. Es wird dabei angenommen, dass das Arbeitsmedium ein ideales Gas ist. Der gesamte Prozess besteht dann aus 4 reversiblen Prozessen, nämlich einer adiabatischen Kompression ($1 \rightarrow 2$) des Gases, einer Expansion bei konstantem Druck ($2 \rightarrow 3$), einer adiabatischen Expansion ($3 \rightarrow 4$) und einer isochoren Kühlung ($4 \rightarrow 1$). Der Druck, die innere Energie des Mediums und die Temperatur an den Endpunkten seien jeweils mit P_i , U_i , und T_i bezeichnet.



- Geben Sie die Zustandsgleichung und die innere Energie U eines idealen Gases an. (3 Punkte)
- Geben Sie an und begründen Sie, in welche Richtung sich in jedem Schritt die Temperatur T ändert. (6 Punkte)
- Zeigen Sie, dass die Adiabaten durch folgenden Zusammenhang charakterisiert sind:

$$PV^{5/3} = \text{const.}$$

Hinweis: Leiten Sie unter Verwendung des 1. Hauptsatzes und der Zustandsgleichung für das ideale Gas zuerst den Zusammenhang zwischen T und V her. (10 Punkte)

- Geben Sie für die isobare Expansion $2 \rightarrow 3$ die zugeführte Wärme und die vom System an der Umgebung geleistete Arbeit als Funktion der Temperaturen T_2 und T_3 an. (6 Punkte)

Aufgabe 2: Carnotprozess mit Photonengas

In dieser Aufgabe soll der Carnotprozess betrachtet werden, also ein Kreisprozess, der aus je zwei adiabatischen und zwei isothermen Abschnitten im Wechsel besteht. Statt des idealen Gases als üblichem Arbeitsmedium soll hier jedoch ein Photonengas betrachtet werden. Für das Photonengas gelten die thermische Zustandsgleichung $p = (\sigma/3)T^4$ und die kalorische Zustandsgleichung $U = 3pV$, wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante ist.

- a) Leiten Sie mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik die Beziehung

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{\text{ad}} = -\frac{p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}$$

her, wobei der Index „ad“ eine adiabatische Zustandsänderung andeutet. (6 Punkte)

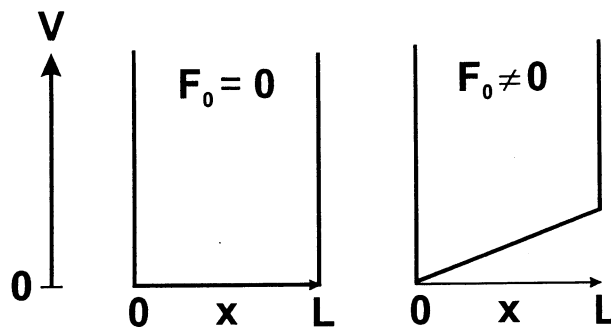
- b) Zeigen Sie, dass eine adiabatische Zustandsänderung des Photonengases durch $TV^\gamma = \text{const.}$ gegeben ist, und bestimmen Sie den Exponenten γ . (8 Punkte)
- c) In welchen zwei der vier Arbeitsschritte wird Wärme zwischen dem System und einem der beiden Wärmebäder ausgetauscht? Berechnen Sie unter Verwendung der Tatsache, dass die Entropie eine Zustandsgröße darstellt, das Verhältnis der ausgetauschten Wärmemengen. Drücken Sie den Wirkungsgrad durch diese Wärmemengen aus, und bestimmen Sie seine Abhängigkeit von den Temperaturen der beteiligten Wärmebäder. Wie vergleicht sich dieses Ergebnis mit dem Wirkungsgrad, der sich für ein ideales Gas als Arbeitsmedium ergibt? (11 Punkte)

Themenschwerpunkt DQuantenmechanikAufgabe 1: Kastenpotenzial im elektrischen Feld

Hinweis: Formeln zur Integration auf Seite 9.

Wir betrachten ein eindimensionales Kastenpotenzial mit unendlich hohen Barrieren bei $x = 0$ und bei $x = L$. Zusätzlich wirke ein schwaches elektrisches Feld F_0/L . Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_1, \\
 H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}, \\
 H_1 &= eF_0 \frac{x}{L}.
 \end{aligned}$$



Wir betrachten zunächst den Fall ohne angelegtes elektrisches Feld (linke Figur).

- Wie lauten die Randbedingungen für eine Wellenfunktion bei $x = 0$ und bei $x = L$? (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Energie und normierte Wellenfunktion des Grundzustands (E_0, ψ_0) und des ersten angeregten Zustands (E_1, ψ_1). Skizzieren Sie ψ_0 und ψ_1 . Welche Parität haben die Zustände bzgl. der Mitte des Kastens? Zeigen Sie, dass gilt $(E_1 - E_0)/E_0 = 3$. (9 Punkte)

Nunmehr betrachten wir den Fall mit angelegtem Feld (rechte Figur).

- Berechnen Sie nun mit Hilfe der Störungstheorie erster Ordnung die Energieverschiebung $\Delta E_0^{(1)}$ und $\Delta E_1^{(1)}$ der ersten beiden Zustände durch das elektrische Feld. Allgemein gilt nach dieser Theorie, dass die durch eine Störung H_1 induzierte Verschiebung eines stationären Zustands ψ_n gegeben ist durch

$$\Delta E_n^{(1)} = \langle \psi_n | H_1 | \psi_n \rangle.$$

(8 Punkte)

- d) Zeigen Sie, dass die Energieverschiebung $\Delta E_n^{(1)}$ für $n = 0, 1$ verschwindet, wenn man zu H_1 eine geeignete Konstante c hinzufügt (und entsprechend von H_0 wieder abzieht). Welche Parität muß $H_1 + c$ dazu bzgl. der Mitte des Kastens besitzen? (6 Punkte)

Formeln:

$$\begin{aligned}\int_0^L dx \sin^2(ax) &= \frac{L}{2} - \frac{\sin(2aL)}{4a} \\ \int_0^L dx x \sin^2(ax) &= \frac{1 + 2a^2 L^2 - \cos(2aL) - 2aL \sin(2aL)}{8a^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Eindimensionale Wellenfunktion

Ein punktförmiges Teilchen der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen Kasten der Breite $2a$ im Intervall $-a < x < a$. Die Wände des Kastens seien undurchdringlich, das Wandpotential sei also unendlich hoch. Das Teilchen werde durch die Wellenfunktion $\psi(x) = A(x^2 - a^2)$ für $|x| < a$ beschrieben.

- a) Berechnen Sie die Normierungskonstante A .

Zur Kontrolle: $A = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{a^5}}$. (5 Punkte)

- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $0 < x < a/2$ zu finden? (5 Punkte)

- c) Berechnen Sie die Fluktuationen Δp des Impulses und Δx des Ortes des Teilchens in diesem Zustand, und überprüfen Sie dafür die Heisenberg'sche Unschärferelation. (10 Punkte)

- d) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Energie des Teilchens nur $(10 - \pi^2)/\pi^2 \simeq 1,32\%$ über der Grundzustandsenergie liegt. (5 Punkte)