

---

<b>Prüfungsteilnehmer</b>	<b>Prüfungstermin</b>	<b>Einzelprüfungsnummer</b>
---------------------------	-----------------------	-----------------------------

---

Kennzahl: \_\_\_\_\_

Kennwort: \_\_\_\_\_

Arbeitsplatz-Nr.: \_\_\_\_\_

---

**Herbst  
2006**

**64013**

**Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen**  
**— Prüfungsaufgaben —**

Fach: **Physik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Theoretische Physik**

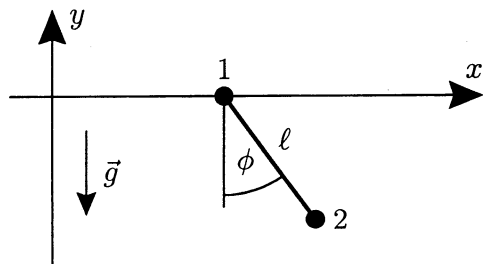
Anzahl der gestellten Aufgaben: 8 Aufgaben, von denen 4 gemäß untenstehender  
Auswahlregel zu bearbeiten sind

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 9

<p>Zu den vier Themenschwerpunkten A (Mechanik), B (Elektrodynamik), C (Thermodynamik) und D (Quantenmechanik) ist jeweils entweder die Aufgabe 1 oder 2 zu wählen. Auf der Vorderseite des Kopfbogens sind im Feld „Gewähltes Thema: Nr.“ die Nummern der vier gewählten Aufgaben anzugeben (z. B. A2, B1, C1, D2)!</p>
--

Bitte wenden!



Themenschwerpunkt AMechanikAufgabe 1: Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt

Eine Punktmasse  $m_2$  sei wie in der Abbildung dargestellt mit Hilfe einer masselosen Stange der Länge  $\ell$  an einer Punktmasse  $m_1$  so aufgehängt, dass die Anordnung in der  $(x, y)$ -Ebene schwingen kann. Die Masse  $m_1$  ist entlang der  $x$ -Achse reibungsfrei verschiebbar. Die gesamte Anordnung befinde sich in einem homogenen Schwerfeld in Richtung der negativen  $y$ -Achse.

- Welche Zwangsbedingungen liegen vor? Drücken Sie die Koordinaten  $(x_2, y_2)$  der Masse  $m_2$  durch die Position  $x_1$  der Masse  $m_1$  und den Winkel  $\phi$  aus. (6 Punkte)
- Zeigen Sie, dass hier neben dem Energieerhaltungssatz ein zweiter Erhaltungssatz gilt. Wie lautet die zugehörige Erhaltungsgröße? (6 Punkte)
- Zeigen Sie mit Hilfe dieses zweiten Erhaltungssatzes, dass die Bahnkurve der zweiten Masse durch

$$\left( \frac{x_2(t) - A(t)}{a_x} \right)^2 + \left( \frac{y_2(t)}{a_y} \right)^2 = 1$$

beschrieben werden kann. Was ergibt sich für  $a_x$ ,  $a_y$  und  $A(t)$ ? Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit die Bewegung auf einer Ellipse erfolgt?

(13 Punkte)



**Aufgabe 2: Fallender Stein auf rotierender Erde**

Wir lassen einen Stein der Masse  $m$  in einen Brunnen fallen, der am Äquator steht. Wegen der Erdrotation folgt die Trajektorie des Steins nicht dem senkrechten Lot in Richtung Erdmittelpunkt. Diese Bewegung wird im rotierenden Bezugssystem der Erde durch

$$m \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = \vec{F}_g - 2m\vec{\omega} \times \frac{d\vec{X}}{dt} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{X})$$

beschrieben, wobei der Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt liegt und die  $z$ -Achse durch die Brunnenöffnung verläuft (siehe Abbildung). Wir nehmen an, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  konstant und die Erde eine Kugel mit Radius  $R$  ist.

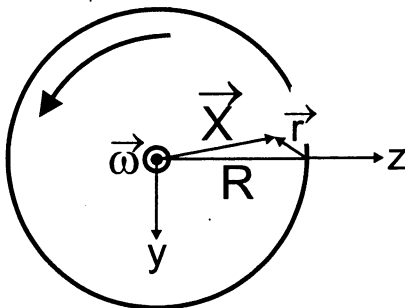


Abbildung: Die Erde in Aufsicht. Die Drehachse  $\vec{\omega}$  zeigt zum Nordpol, der über der Papierebene auf der  $x$ -Achse liegt. Die Koordinatenachsen  $y$  und  $z$  liegen in der Äquatorialebene, was für die Vektoren  $\vec{X}$  und  $\vec{r}$  nicht zutreffen muss.

- a) Führen Sie die Relativkoordinate

$$\vec{r} = \vec{X} - R \vec{e}_z$$

ein, wobei  $R$  die Distanz vom Erdmittelpunkt zur Brunnenöffnung ist. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für  $\vec{r}(t)$  im erdfesten Koordinatensystem. Nehmen Sie hierbei vereinfachend an, dass die Erdanziehungskraft  $\vec{F}_g = -mg_0 \vec{e}_z$  die der ruhenden Erde und unabhängig von  $\vec{r}$  ist. Nehmen Sie ferner an, dass die Zentrifugalkraft ebenfalls unabhängig von  $\vec{r}$  ist, was für nicht zu tiefe Brunnen näherungsweise zutrifft. (5 Punkte)

- b) Lösen Sie diese Bewegungsgleichung zunächst unter Vernachlässigung der Corioliskraft und berechnen Sie die Trajektorie  $\vec{r}_0(t)$  des Steins. Zeigen Sie, dass er einer effektiven Erdbeschleunigung  $g_{\text{eff}} = g_0 - \omega^2 R$  unterliegt. (6 Punkte)

- c) Ausgehend von dieser Trajektorie  $\vec{r}_0(t)$  addieren wir nun die Corioliskraft. Setzen Sie dazu  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}$ , und zeigen Sie, dass für geeignete Anfangsbedingungen die Differenzialgleichung

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\omega} \times (\vec{r}_0 + \vec{u})$$

gilt. (8 Punkte)

- d) Nehmen Sie schließlich an, dass die Abweichung  $\vec{u}$  vom Lot so klein ist, dass sie auf der rechten Seite von Gleichung (3) vernachlässigt werden kann, und berechnen Sie für diesen Fall explizit  $\vec{u}(t)$ . Zeigen Sie, dass die Trajektorie  $\vec{r}(t)$  gegenüber  $\vec{r}_0(t)$  nach Osten abgelenkt wird. (6 Punkte)



Themenschwerpunkt BElektrodynamik/OptikAufgabe 1: Elektrostatische Energie

Die elektrostatische Energie von  $N$  Punktladungen  $q_i$  an den Orten  $\vec{r}_i$  ist gegeben durch

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

- a) Wie hängt dieser Ausdruck mit dem Coulomb-Potential zweier Punktladungen zusammen, und welcher Arbeit entspricht die Energie  $U$  physikalisch? (4 Punkte)
- b) Betrachten Sie nun eine lokalisierte, kontinuierliche Ladungsverteilung mit Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$ . Wie lautet der Ausdruck für die elektrostatische Energie in diesem Fall? Leiten Sie das Ergebnis aus Gleichung (1) durch einen Kontinuumsübergang her. (6 Punkte)
- c) Warum braucht man sich im Falle der kontinuierlichen, nicht-singulären Ladungsverteilung ( $|\rho(\vec{r})| < \infty$ ) nicht um die Bedingung  $i \neq j$  in Gleichung (1) zu kümmern? (6 Punkte)
- d) Wie kann man die Energie aus Teilaufgabe b durch die elektrische Feldstärke, die von der Ladungsverteilung erzeugt wird, darstellen? Verwenden Sie die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

oder das Gauss'sche Gesetz.

(9 Punkte)



**Aufgabe 2: Magnetfeld einer Stromverteilung**

Gegeben sei ein zylinderförmiger Leiter vom Radius  $R$ , durch welchen ein homogen verteilter Strom  $I$  fließt. Wählen Sie Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  mit der  $z$ -Achse in Richtung der Zylinderachse.

- a) Begründen Sie, dass die magnetische Induktion  $\vec{B}$  nur eine  $\varphi$ -Komponente hat. (5 Punkte)
- b) Bestimmen und skizzieren Sie die Ortsabhängigkeit der magnetischen Induktion  $B_\varphi(r)$  innerhalb und außerhalb des Zylinders. (6 Punkte)

Gegeben sei nun ein Hohlzylinder mit innerem Radius  $R_1$  und äußerem Radius  $R_2$ , welcher vom Strom  $I$  in  $z$ -Richtung durchflossen wird.

- c) Bestimmen Sie die Stromdichte  $j$ . Bestimmen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe b die magnetische Induktion  $B_\varphi(r)$ . Skizzieren Sie die Ortsabhängigkeit von  $B_\varphi(r)$ . (7 Punkte)
- d) Betrachten Sie den Grenzfall  $d = R_2 - R_1 \rightarrow 0$ : Bestimmen Sie die magnetische Induktion für eine sehr dünne Zylinderwand ( $d \ll R_1, R_2$ ). Was folgt daraus für den Sprung der magnetischen Induktion an einer stromdurchflossenen Grenzfläche? (7 Punkte)



**Themenschwerpunkt C****Thermodynamik****Aufgabe 1: Drossel-Prozess**

Mit dem Drossel- oder Joule-Thompson-Prozess werden Gase verflüssigt. Ein Gasstrom mit einem Volumen  $V$  wird durch eine Drossel oder eine poröse Membran gepresst und ändert dabei seine Temperatur  $T$ , seine innere Energie  $U$  und seinen Druck  $p$ . Man kann zeigen, dass bei diesem Prozess die Enthalpie  $H(S, p) = U + pV$  konstant bleibt.

- a) Zeigen Sie für den Spezialfall des idealen Gases, dass die Temperatur bei diesem Prozess konstant bleibt. (5 Punkte)
- b) Leiten Sie für den allgemeinen Fall die folgende Beziehung zwischen der Druckabhängigkeit der Entropie  $S$  und der Temperaturabhängigkeit des Volumens  $V$  her:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Betrachten Sie dazu die freie Enthalpie  $G(T, p)$ . (8 Punkte)

- c) Aus der Wärmekapazität  $C_p$  und dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$  kann man berechnen, ob und wie stark sich die Temperatur des Gases beim Drossel-Prozess abkühlt. Zeigen Sie dazu mit Hilfe der vorigen Gleichung

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{V}{C_p}(T\alpha - 1).$$

(12 Punkte)

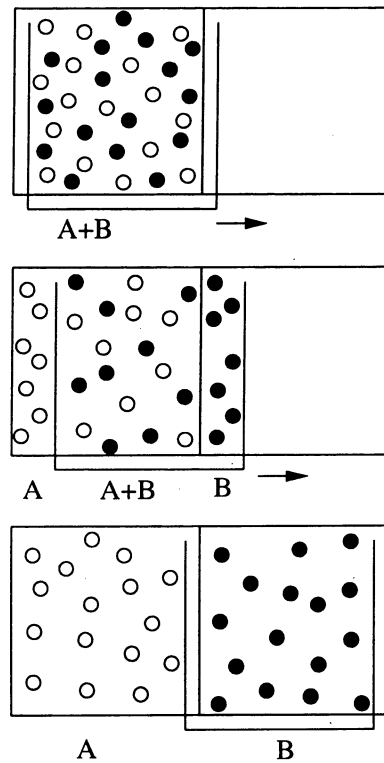
**Aufgabe 2: Mischungsentropie für ideale Gase**

Betrachten Sie das folgende Gedankenexperiment mit einem Gemisch zweier idealer Gase:

Ein Zylinder wird durch eine starre Wand halbiert, die nur für die Teilchensorte  $B$  durchlässig ist. Zwei bewegliche Wände mit festem Abstand schließen das halbe Zylindervolumen ein; die linke Wand ist durchlässig für Teilchensorte  $A$ , die rechte undurchlässig für alle Teilchen. Das gesamte System wird auf der Temperatur  $T$  gehalten. Am Anfang steht der bewegliche Teil ganz links und wird mit je 1 Mol von Teilchen der Sorten  $A$  und  $B$  gefüllt, der Rest des Zylinders wird evakuiert. Der bewegliche Teil wird dann quasi-statisch nach rechts bewegt, bis beide Gase entmischt sind (siehe Abbildungen).

Fortsetzung nächste Seite!





- a) Wie hängt die innere Energie eines idealen Gases von der Temperatur und der Teilchenzahl ab? Bestimmen Sie hieraus die Änderung  $\Delta U$  in unserem Gedankenexperiment. (6 Punkte)
- b) Wie lautet die Gleichgewichtsbedingung für Teilchentransport durch die beiden semipermeablen Wände? Das chemische Potential für jede Komponente lässt sich darstellen als

$$\mu_i = RT \ln \frac{P_i v_0}{RT} + f_i(T)$$

( $v_0$ : Referenzvolumen,  $P_i$ : Partialdruck der  $i$ -ten Komponente,  $f_i(T)$ : Funktion der Temperatur, deren genaue Form hier unwichtig ist). Was bedeutet die Gleichgewichtsbedingung demnach für die Partialdrücke der beiden Gasen in den verschiedenen Teilvolumina? (6 Punkte)

- c) Wie groß ist die mechanische Arbeit, die beim Entmischen gemäß dem Gedankenexperiment verrichtet wird? (6 Punkte)
- d) Was folgt aus den Teilaufgaben a bis c für die Änderung der Entropie des Gesamtsystems? Formulieren Sie abschließend den Zusammenhang zwischen der Entropie eines Gemisches zweier idealer Gase und der Entropie der einzelnen Gase in Form eines Satzes (Gibbs'sches Theorem). (7 Punkte)



Themenschwerpunkt DQuantenmechanikAufgabe 1: Freies quantenmechanisches Teilchen und Ehrenfest-Theorem

Das Ehrenfest-Theorem für Observable, die nicht explizit von der Zeit abhängen, lautet

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle.$$

Spitze Klammern stehen für den Erwartungswert in einem quantenmechanischen Zustand. Wir betrachten ein freies Teilchen der Masse  $m$ , das sich nur entlang der  $x$ -Achse bewegen kann.

- a) Verwenden Sie Gleichung (1), um die Erwartungswerte von  $p$  und  $p^2$  als Funktion von  $t$  zu bestimmen (die Anfangswerte zur Zeit  $t = 0$  seien vorgegeben). Was folgt daraus für die Zeitabhängigkeit der Impulsunschärfe

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \quad ?$$

(5 Punkte)

- b) Betrachten Sie nun die gemischte Fluktuationsgröße

$$\kappa = \langle (xp + px) \rangle - 2\langle x \rangle \langle p \rangle,$$

welche die Korrelation zwischen  $x$  und  $p$  beschreibt. Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit von  $\kappa$  für das freie Teilchen mit Hilfe von Gleichung (1).

$$\text{Zur Kontrolle: } \kappa = \kappa_0 + \frac{2(\Delta p)_0^2}{m} t.$$

(10 Punkte)

- c) Berechnen Sie schließlich auch die Zeitabhängigkeit des Erwartungswertes von  $x^2$ . Drücken Sie die Ortsunschärfe

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

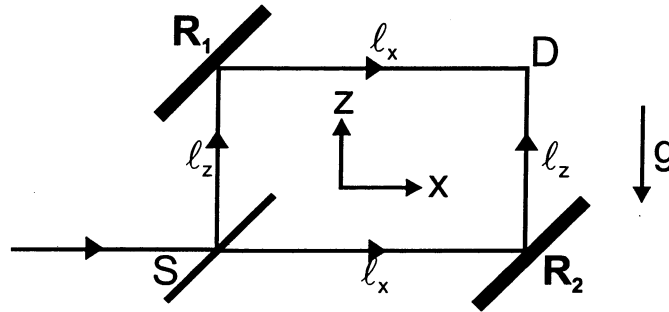
zur Zeit  $t$  durch  $\Delta x$ ,  $\Delta p$  und  $\kappa$  zur Zeit  $t = 0$  aus. Was erhält man für große Zeiten?

(10 Punkte)



**Aufgabe 2: Interferenz im Schwerfeld**

Ein kohärenter Teilchenstrahl aus (unabhängigen) Teilchen der Masse  $m$  und Energie  $E$  läuft durch einen Strahlteiler  $S$  bei  $(x, z) = (0, 0)$  und wird in 2 Teilstrahlen geteilt (siehe Figur).



- Der erste Strahl führt von  $S$  senkrecht nach oben zu einem Reflektor  $R_1$  an der Stelle  $(x, z) = (0, l_z)$  und von dort horizontal weiter zu einem Detektor  $D$  an der Stelle  $(x, z) = (l_x, l_z)$ . Diesen Weg bezeichnen wir mit  $W_1$ .
- Der zweite Strahl führt von  $S$  horizontal zu einem Reflektor  $R_2$  an der Stelle  $(x, z) = (l_x, 0)$  und anschließend senkrecht nach oben zum selben Detektor  $D$ . Diesen Weg bezeichnen wir mit  $W_2$ .

Das Gravitationsfeld der Erde führt zu einer Phasenverschiebung zwischen den beiden Teilstrahlen am Detektor  $D$ , die sowohl von  $l_x$  als auch von  $l_z$  abhängt.

- a) Berechnen Sie den Phasenunterschied  $\Delta\varphi$  zwischen den beiden Strahlen an der Stelle  $D$  für  $E > mgl_z$  unter der Annahme, dass die Wellenfunktion eines Teilchens gegeben ist durch (WKB-Näherung)

$$\psi(\vec{x}) = A \exp \left( i \int_{\vec{x}} \frac{\vec{p}(\vec{r})}{\hbar} \cdot d\vec{r} \right).$$

Hieraus folgt der Phasenunterschied

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\hbar} \int_{W_1} \vec{p}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \frac{1}{\hbar} \int_{W_2} \vec{p}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

wobei  $\vec{p}(\vec{r})$  der klassisch berechnete Teilchenimpuls eines Teilchens der Masse  $m$  und Energie  $E$  im Schwerfeld ist.

*Hilfe:* Die Integrale entlang der vertikalen Wege brauchen nicht ausgewertet zu werden.

(5 Punkte)

- b) Nehmen wir nun an, dass  $E \gg mgl_z$  gilt. Zeigen Sie, dass dann der Phasenunterschied  $\Delta\varphi$  proportional zur Fläche  $A = l_x l_z$  ist, die von den beiden Strahlen eingeschlossen wird.

(5 Punkte)

- c) Benützen Sie dieses Resultat, um den Abstand zwischen den Interferenz-Maxima zu berechnen, wenn wir  $l_z$  konstant halten und  $l_x$  variieren.

(8 Punkte)